Matrice scattering (di diffusione)

Onde di potenza: $a = \sqrt{Y_\infty}\, V^+ \quad b = \sqrt{Y_\infty}\, V^-$
Orientamento asse z: entrante nel dipositivo
Espressione generale: $[b] = [S][a]$

$$P_d = \frac{1}{2}[a]^{T*}([1] - [S]^{T*}[S])[a]$$

Formule per 2-porte

$$\Gamma_{in} = s_{11} + \frac{s_{12}s_{21}\Gamma_L}{1 - s_{22}\Gamma_L} \quad \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_r}{Z_L + Z_r} \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{|s_{21}|^2}{|1 - s_{22}\Gamma_L|^2} \cdot \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{1 - |\Gamma_{in}|^2}$$

Relazioni tra le matrici [S] e [Z]

$[Z_r]$ →matrice diagonale con l'impedenza di normalizzazione sulla diagonale.

$$[\zeta] = [Z_r]^{-\frac{1}{2}}[Z][Z_r]^{-\frac{1}{2}}$$
$$[S] = \{[\zeta] - [1]\} \cdot \{[\zeta] + [1]\}^{-1}$$
$$[Z] = [Z_\infty]^{\frac{1}{2}} \cdot \{[1] + [S]\} \cdot \{[1] - [S]\}^{-1}[Z_\infty]^{\frac{1}{2}}$$

$$[y] = [Z_r]^{\frac{1}{2}}[Y][Z_r]^{\frac{1}{2}}$$
$$[S] = \{[1] - [y]\} \cdot \{[1] + [y]\}^{-1}$$
$$[Y] = [Z_\infty]^{-\frac{1}{2}} \cdot \{[1] - [S]\} \cdot \{[1] + [S]\}^{-1}[Z_\infty]^{-\frac{1}{2}}$$

Proprietà

Se il mezzo è senza perdite: $[S]^{T*}[S] = [1]$
$[S]^{-1} = [S]^{T*}$

Dispositivo reciproco ⟶ resistenze, capacità, induttanze, linee di trasmissione
Dispositivo reciproco ⟶ [S] simmetrico
Dispositivo passivo ⟶ modulo degli autovalori di $[S]^{T*}[S]$ minore o uguale a 1
Dispositivo attivo ⟶ almeno un modulo degli autovalori di $[S]^{T*}[S]$ è maggiore di uno.

Cambio di impedenza di riferimento

$$[S_2] = \frac{[S]_{12} + [S]}{[1] + [S]_{12}[S]} \quad \text{con:} \quad [S]_{12} = \frac{[R] - [R]^{-1}}{[R] + [R]^{-1}} = \frac{[R]^2 - 1}{[R]^2 + 1} \quad \text{e} \quad [R] = [Z_{r2}]^{-\frac{1}{2}}[Z_{r2}]^{\frac{1}{2}}$$

Spostamento dei piani di riferimento

$[S] = [e^{-jkl}] \cdot [S_0] \cdot [e^{-jkl}] \rightarrow S_{ii} = S_{0ii} \cdot e^{-2jkl}$ e $S_{ij} = S_{0ij} \cdot e^{-j(k_i l_i + k_i l_i)}$

Unione di blocchi

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & : & S_{12} \\ \cdot\cdot & : & \cdot\cdot \\ S_{21} & : & S_{22} \end{bmatrix}$$

$$[S_{11}] = [S'_{11}] + [S'_{11}][S''_{11}]([1] - [S'_{22}][S''_{11}])^{-1}[S'_{21}]$$
$$[S_{12}] = [S'_{12}]([1] - [S''_{11}][S'_{22}])^{-1}[S''_{12}]$$
$$[S_{21}] = [S''_{21}]([1] - [S'_{22}][S''_{11}])^{-1}[S'_{21}]$$
$$[S_{22}] = [S''_{22}] + [S''_{21}]([1] - [S'_{22}][S''_{11}])^{-1}[S'_{22}][S''_{12}]$$

Dispositivi

Attenuatore ideale

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & Ae^{-j\varphi} \\ Ae^{-j\varphi} & 0 \end{bmatrix}$$

Isolatore

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e^{-j\varphi} & 0 \end{bmatrix}$$

Circolatore

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{-j\varphi_1} \\ e^{-j\varphi_2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\varphi_3} & 0 \end{bmatrix}$$

Accoppiatore ideale direzionale

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1-k^2} & jk & 0 \\ \sqrt{1-k^2} & 0 & 0 & jk \\ 0 & jk & \sqrt{1-k^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice di trasmissione

Elementi concatenati**:** $[T] = [T'][T'']$

Legame tra [S] e [T]

$$[T] = \begin{bmatrix} [S_{11}] & : & [S_{12}] \\ \cdot\cdot & : & \cdot\cdot \\ [S_{21}] & : & [S_{22}] \end{bmatrix}$$

$$[T_{11}] = [S_{21}]^{-1}$$
$$[T_{12}] = -[S_{21}]^{-1}[S_{22}]$$
$$[T_{21}] = [S_{11}][S_{21}]^{-1}$$
$$[T_{22}] = [S_{12}] - [S_{11}][S_{21}]^{-1}[S_{22}]$$

$$[S_{11}] = [T_{21}][T_{11}]^{-1}$$
$$[S_{12}] = [T_{22}] - [T_{21}][T_{11}]^{-1}[T_{12}]$$
$$[S_{21}] = [T_{11}]^{-1}$$
$$[S_{22}] = -[T_{11}]^{-1}[T_{12}]$$