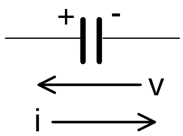
<u>Condensatore</u>

1) Definizione



<u>Struttura</u>: il condensatore è formato da due o più superfici conduttrici, chiamate armature, separate da un materiale isolante, chiamato dielettrico.

<u>Equazioni Caratteristiche:</u> La tensione tra armature è direttamente proporzionale alla carica presente sulle due armature.
Quindi:

$$Q(t) = C \cdot V(t)$$

dove: Q = Carica in Coulomb
V = tensione in Volt
C = Capacità in Farad: $Farad = \frac{Coulomb}{Volt}$

Per esprimere la relazione tra tensione e corrente, esistono due forme di equazioni: la forma integrale e la forma differenziale.

a) Forma differenziale
Consideriamo le equazioni

$$Q = C \cdot V$$
$$i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

Si può quindi scrivere che:

$$i(t) = \frac{d(C \cdot V)}{dt}$$

Poichè C è una costante, si ha che:

$$i(t) = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

Questa è la forma differenziale dell'equazione caratteristica del condensatore.

b) Forma integrale
Consideriamo la forma differenziale:

$$i(t) = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

Si può riscrivere come:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i(t)$$

E quindi, risolvendo una equazione differenziale:

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i(x)dx$$

Questa è la forma integrale dell'equazione caratteristica del condensatore.

2) Proprietà

<u>1) Il condensatore è un elemento *con memoria*</u>
Consideriamo la forma integrale:

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i(t)dt$$

Si può commentare in questo modo:

$$\left(\begin{matrix}\text{Tensione nell'attuale} \\ \text{istante t}\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}\text{Tesnione} \\ \text{iniziale}\end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix}\text{Variazioni di corrente dall'istante} \\ \text{iniziale } t_0 \text{ all'attuale istante t}\end{matrix}\right)$$

Il condensatore viene perciò definito un elemento *con memoria*: i valori di tensione e corrente non dipendono solo dalle condizioni attuali del circuito, come avveniva per le resistenze, ma anche dai valori passati che sono stati assunti.

<u>2) Il condensatore è un elemento *continuo*</u>
Si consideri l'equazione integrale del condensatore per determinare il valore della tensione all'istante k:

$$v(k) = v_0 + \frac{1}{C} \int_{k_0}^{k} i(t)dt$$

dopo un istante Δt l'equazione diventa:

$$v(k + \Delta t) = v_0 + \frac{1}{C} \int_{k_0}^{k+\Delta t} i(t)dt$$

Aggiungiamo sia a destra che a sinistra la stessa quantità, cioè:

$$v(k) = v_0 + \frac{1}{C}\int_{k_0}^{k} i(t)dt$$

E otteniamo questa equazione:

$$v(k+\Delta t) - v(k) = v_0 + \frac{1}{C}\int_{k_0}^{k+\Delta t} i(t)dt - v_0 - \frac{1}{C}\int_{k_0}^{k} i(t)dt$$

Che, spezzando il primo integrale, si può riscrivere come:

$$v(k+\Delta t) - v(k) = \left(\frac{1}{C}\int_{k}^{k+\Delta t} i(t)dt - \frac{1}{C}\int_{k_0}^{k} i(t)d\right) - \frac{1}{C}\int_{k_0}^{k} i(t)dt$$

Che diventa, semplificando:

$$v(k+\Delta t) - v(k) = \frac{1}{C}\int_{k}^{k+\Delta t} i(t)dt$$

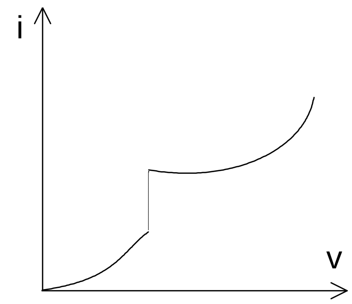
Supponiamo ora che l'intervallo Δk diventi sempre più piccolo, e facciamo il limite:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{C}\int_{k}^{k+\Delta t} i(t)dt = 0$$

Quindi si può anche scrivere che:

$$\lim_{\Delta t \to 0} v(k+\Delta t) - v(k) = 0$$

E' dimostrato così che la funzione è continua per tutti i tempi positivi. Il limite sopra indicato significa che è impossibile trovare un grafico discontinuo come il seguente:



Questo è invece possibile per elementi senza memoria come le resistenze.

3) Energia

Ricordiamo alcune formule:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$
$$\Delta E(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} p(t)dt$$
$$i(t) = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

Dove: P = potenza
v = tensione
i = corrente
E = energia
C = capacità

Unendo le formule, si può scrivere che:

$$p(t) = v(t) \cdot C \cdot \frac{dv}{dt}$$

E quindi:

$$\Delta E(t_0, t_1) = C \cdot \int_{t_0}^{t_1} v(t) \cdot \frac{dv}{dt} \cdot dt = C \cdot \int_{t_0}^{t_1} v(t)dv$$

L'integrale indefinito risulta:

$$\Delta E(t_0, t_1) = \left[\frac{1}{2} \cdot C \cdot v^2\right]_{t_0}^{t_1}$$

E quello definito:

$$\Delta E(t_0, t_1) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left[v(t_1)^2 - v(t_0)^2\right]$$

Risulta evidente che l'energia immagazzinata dipende solo dal valore iniziale e finale della tensione. Ogni volta che $t_1 = t_0$, l'energia accumulata è nulla.
Consideriamo ora che l'energia totale di un condensatore è data da:

$$E_{tot} = E_0 + \Delta E$$

Quindi si può sostituire e scrivere che:

$$E_{tot} = E_0 - \frac{1}{2} \cdot C \cdot v(t_0)^2 + \frac{1}{2} \cdot C \cdot v(t_1)^2$$

Sicuramente esiste nel tempo un istante T_0 nel quale l'energia iniziale E_0 e la tensione iniziale $V(t_0)$ erano nulle. Questo istante corrisponde a quando il condensatore è completamente scarico.
Quindi la precedente formula diventa:

$$E_{tot}(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot v(t)^2$$

Cioè l'energia totale nell'istante t è in funzione solo della tensione V alla quale in condensatore è sottoposto.

Si può scrivere anche che:

$$E_{tot}(v) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot v^2$$

Si può concludere quindi che il condensatore non dissipa energia, ma la può immagazzinare

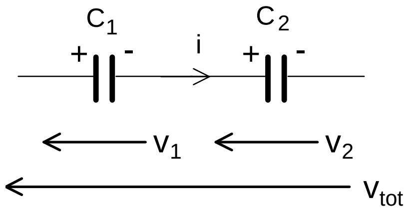
4) Se la tensione è costante, il condensatore equivale a un circuito aperto.

Per dimostrarlo, ricordiamo che:

$$i(t) = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

Se $v(t) = k$, la sua derivata è nulla, perchè la derivata di una costante è sempre nulla.

5) Condensatori in serie



Sono dati i due condensatori in serie C_1 e C_2. Attraverso essi scorre una corrente i, e su di essi ci sono le tensioni v_1 e v_2.

La tensioni totale ai capi della serie è data da:

$$V_{tot} = V_1 + V_2$$

Quindi, ricordando la forma integrale dell'equazione per i condensatori, si ha che:

$$V_{tot} = v_0 + \frac{1}{C_1} \int_{t_0}^{t} i(t)dt + \frac{1}{C_2} \int_{t_0}^{t} i(t)dt$$

cioè

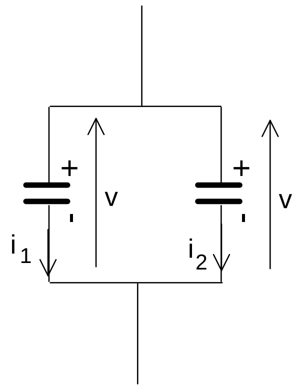
$$V_{tot} = v_0 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \cdot \int_{t_0}^{t} i(t)dt$$

Da cui si deduce che la capacità equivalente della serie è:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Fisicamente significa che all'aumentare dei condensatori in serie, la capacità totale diminuisce.

6) Condensatori in parallelo



Sono dati i due condensatori in parallelo C_1 e C_2. Attraverso essi scorrono le correnti i_1 e i_2 e è applicata la tensione v.

La corrente totale che passa ai capi del parallelo è data da:

$$I_{tot} = i_1 + i_2$$

Ricordando la forma differenziale, si può scrivere:

$$I_{tot} = C_1 \cdot \frac{dv}{dt} + C_2 \cdot \frac{dv}{dt}$$

cioè:

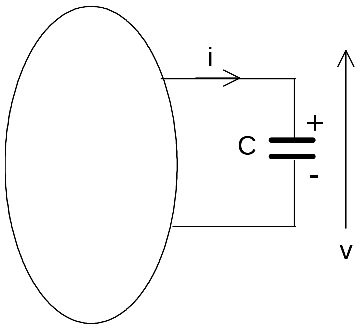
$$I_{tot} = (C_1 + C_2) \cdot \frac{dv}{dt}$$

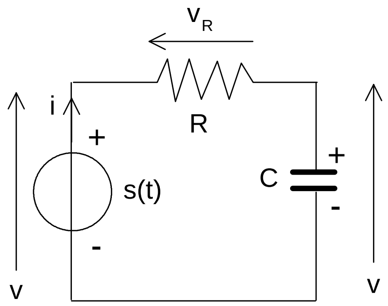
Da cui si deduce che la capacità totale è:

$$C_{tot} = C_1 + C_2$$

3) Il condensatore nel circuito

E' dato un circuito contente solo elementi lineari, a eccezione di un condensatore (figura di sinistra). Allora l'insieme dei componenti lineari può essere sostituito da un Equivalente di Thevenin, collegato al condensatore (figura di destra).





Consideriamo il circuito di destra. Si può applicare la KVL:

$$s(t) - V_R - V_C = 0$$

Ricordando la legge di Ohm: $V = R \cdot I$ e l'equazione caratteristica del condensatore: $i(t) = C \cdot \frac{dv}{dt}$, si può scrivere nella precedente KVL che:

$$s(t) - R \cdot C \cdot \frac{dV_C(t)}{dt} - V_C(t) = 0$$

Cioè:

$$\frac{dV_C(T)}{dt} - \frac{1}{\tau} \cdot V_C(t) - \frac{1}{\tau} s(t) = 0$$

Ponendo $\tau = C \cdot R_{eq}$, cioè $\tau =$(Capacità)·(Resistenza equivalente del circuito)

Questa è l'equazione differenziale che descrive la tensione di un condensatore inserito in un circuito in cui tutti gli altri elementi sono lineari.
Bisogna ora risolvere questa equazione. E' un equazione differenziale lineare di primo grado non omogenea. Si può scrivere più genericamente come:

$$V(t)' - \frac{1}{\tau} V(t) - s(t) = 0$$

Per risolvere questa equazione, bisogna risolvere un Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} V(t)' - \frac{1}{\tau} V(t) - s(t) = 0 \\ V(0) = K \end{cases}$$

Per risolvere l'equazione differenziale associata al problema di Cauchy si può utilizzare un formula semplice:

$$\begin{cases} y(t)' = p(t) y + q(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La soluzione è data da:

$$y(t) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s) ds} \cdot \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} q(s) \cdot e^{-\int_{t_0}^{s} p(u) du} ds \right]$$

Nel nostro caso, si ha che:

$$p(s) = -\frac{1}{\tau} \qquad q(s) = -\frac{1}{\tau} s(t)$$

Quindi la soluzione risulta:

$$V(t) = e^{\int -\frac{1}{\tau} dt} \cdot \left[K + \int \frac{1}{\tau} \cdot s(t) \cdot e^{-\int -\frac{1}{\tau} dt} \right]$$

Che, semplificata, diventa:

$$V_C(t) = K \cdot e^{-\frac{1}{\tau} t} + \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{1}{\tau} t} \cdot \int_0^t s(t) \cdot e^{-\frac{1}{\tau} t} dt$$

Se calcoliamo il valore della funzione per t=0, si ottiene che:

x(0)=K

E quindi K è la condizione iniziale del circuito. Quindi di può scrivere che:

$$V_C(t) = V_c(0) \cdot e^{-\frac{1}{\tau} t} + \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{1}{\tau} t} \cdot \int_0^t s(t) \cdot e^{-\frac{1}{\tau} t} dt$$

Generatori costanti

Considero la precedente formula:

$$V_C(t) = V_c(0) \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t} + \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t} \cdot \int_0^t s(t) \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t} dt$$

Suppongo che s(t) sia costante, cioè che s(t)=S. La precedente formula diventa:

$$V_C(t) = V_c(0) \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t} + \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t} \cdot S \cdot \int_0^t e^{-\frac{1}{\tau}t} dt$$

Svolgendo l'integrale definito si ottiene che:

$$V_C(t) = V_c(0) \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t} + \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t} \cdot S \cdot \left(\tau \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t} - \tau\right)$$

E quindi:

$$V_C(t) = V_c(0) \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t} + e^{-\frac{1}{\tau}t} \cdot S \cdot \left(e^{-\frac{1}{\tau}t} - \tau\right)$$

Per $t \rightarrow +\infty$, si ottiene che:

$$x(\infty) = S$$

Quindi si può riscrivere la precedente formula come:

$$V_C(t) = V_c(0) \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t} + e^{-\frac{1}{\tau}t} \cdot V_c(\infty) \cdot \left(e^{-\frac{1}{\tau}t} - \tau\right)$$

E svolgendo i passaggi si ottiene che:

$$V_C(t) = [V_c(0) - V_c(\infty)] \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t} + V_c(\infty)$$

Elemento qualsiasi del circuito

Per calcolare la tensione di un elemento qualsiasi del circuito si utilizza un formula analoga a quella del condensatore:

$$V_K(t) = V_K(0^+) \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t} + e^{-\frac{1}{\tau}t} \cdot V_K(\infty) \cdot \left(e^{-\frac{1}{\tau}t} - \tau\right)$$

Dove: $\tau = C \cdot R_{eq}$, cioè ha lo stesso valore di quella utilizzata nell'equazione del condensatore

V_k = tensione ai capi dell'elemento K

Nota: la tensione V(0) va calcolata in 0^+, perchè se l'elemento lineare non è continuo, da 0^- a 0^+ potrebbero esserci dei salti di tensione. Questo problema non sussiste per il condensatore, che invece è un elemento continuo. Ciò significa che la tensione ai suoi capi non subisce sbalzi da 0^- a 0^+.