Teoremi su correnti e tensioni

1) Combinazione lineare

Definizione: in un circuito, ogni corrente e tensione è data a una combinazione lineare di generatori:

$$V = K_1 \cdot g_1 + K_2 \cdot g_2 + K_3 \cdot g_3 \ldots.$$
$$I = K_1 \cdot g_1 + K_2 \cdot g_2 + K_3 \cdot g_3 \ldots.$$

Dove I = corrente in un qualsiasi punto del circuito
V= tensione in un qualsiasi punto del circuito
K= coefficienti di ciascun generatore
g = Generatore di corrente o di tensione

2) Sovrapposizione degli effetti

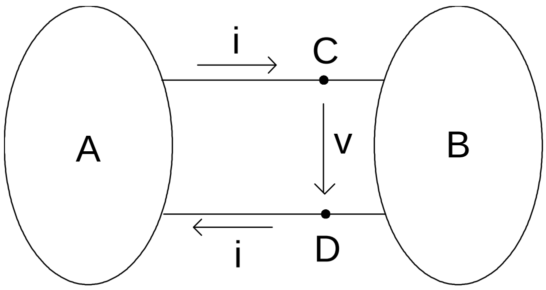
Dalla legge della combinazione lineare deriva questo metodo di risoluzione delle reti di resistori. Questo metodo serve per ottenere informazioni su correnti e tensioni del circuito.

1) Si sceglie un ramo del circuito con un generatore.
2) Si considerano a zero gli altri generatori. Ciò significa che un generatore di tensione diventa un cortocircuito, e un generatore di corrente un circuito aperto.
3) Si ridisegna il circuito, escludendo eventuali parti superflue
4) Si calcola il valore parziale della corrente o tensione con il circuito modificato.
5) Si ripete questa operazione con tutti i generatori.
6) Si sommano gli apporti dei singoli generatori.

NB: questo metodo è sconsigliato per la risoluzione di problemi, perchè risulta particolarmente lungo e offre molte possibilità di errore.

NB: Questo metodo è valido solo per tensioni e correnti, cioè per le due grandezze fondamentali dei circuiti. Non è possibile utilizzarlo per grandezze derivate, come la potenza

3) Principio di sostituzione



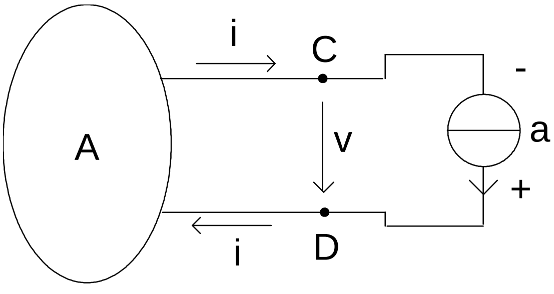
Dato il circuito rappresentato in figura, è sempre possibile sostituire il circuito B con un generatore di tensione o un generatore di corrente.

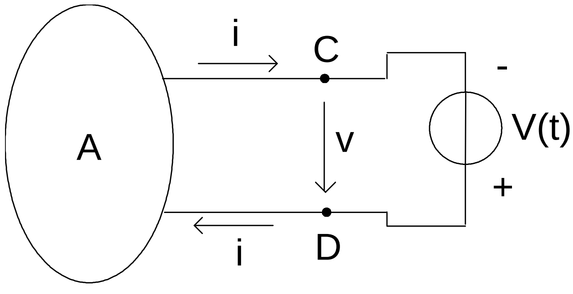
- Se si sostituisce un generatore di corrente, la funzione impressa di corrente deve essere:

a(t)=i

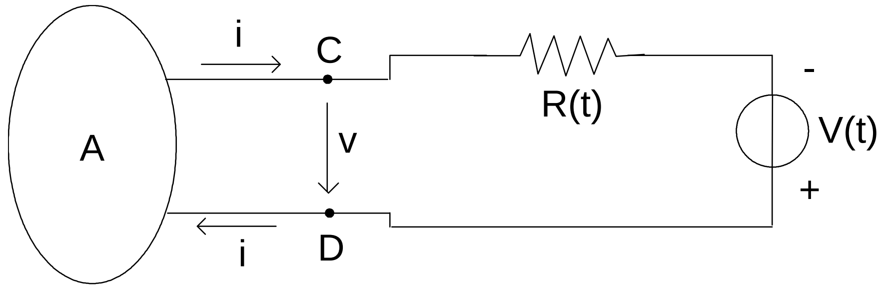
- Se si sostituisce un generatore di tensione, la funzione impressa di tensione deve essere:

e(t)=v





2) Teorema di Thevenin



Definizione: un circuito B collegato solo attraverso due cavi a un altro circuito A (vedi la prima fig. del *Principio di sostituzione*), è sempre equivalente a un generatore di tensione in serie a una resistenza.

Generatore: la tensione del generatore V_T è la tensione a vuoto (cioè con i capi aperti) sui capi CD, prodotta dal circuito A

Resistenza: la resistenza R_T è la resistenza equivalente del circuito B con tutti i generatori interni posti a zero

Dimostrazione

1) Applicando il principio di sostituzione, sostituisco il circuito B con un generatore di corrente $\overline{a}$

2) Calcolo la tensione tra C e D utilizzando il principio della sovrapposizione degli effetti:

$$V_{CD} = K_1 \cdot g_1 + K_2 \cdot g_2 + \ldots. + \overline{K} \cdot \overline{a}$$

Dove: K_1 = coefficiente del generatore g_1

g_1 = generico generatore appartenente a A

$\overline{K}$ = coefficiente del generatore $\overline{a}$ esterno ad A

$\overline{a}$ = generatore di corrente esterno ad A.

3) Si indica con V_0 la tensione prodotta da tutti i generatori interni a A:

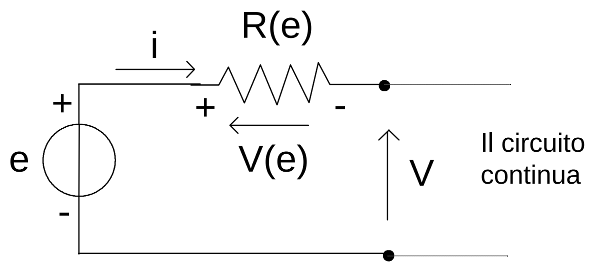
$$V_0 = K_1 \cdot g_1 + K_2 \cdot g_2 + \ldots.$$

Si ottiene quindi che:

$$V_{CD} = V_0 + \overline{K} \cdot \overline{a}$$

Risulta evidente che $\overline{K}$ è una resistenza, perchè solo in questo modo è possibile che $\overline{K} \cdot \overline{a}$ sia una tensione sommabile al resto del circuito.

4) Si consideri ora il circuito Z della figura:



Per la KVL, si ha che:

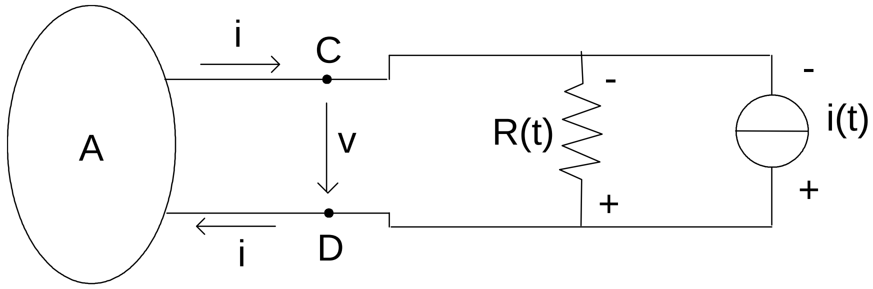
$$e = V_e + V$$
$$V = e - R_e \cdot i$$

5) Ponendo: $V_0 = e$

$R_e = -\overline{K}$

Il circuito Z mostrato e quello equivalente di B sono uguali.

3) Teorema di Norton



Definizione: Dato un circuito B collegato a un circuito A solo attraverso due cavi (vedi la prima fig. del *Principio di sostituzione*), è sempre possibile sostituire il circuito B con un generatore di corrente in parallelo a una resistenza

Generatore: la corrente del generatore i_T è la corrente di cortocircuito (cioè con i capi cortocircuitati) sui capi CD, prodotta dal circuito A

Resistenza: la resistenza R_T è la resistenza equivalente del circuito B con tutti i generatori interni posti a zero, cioè spenti

Dimostrazione: si procede analogamente al teorema di Thevenin

NB: Vantaggio dei teoremi di Thevenin e Norton: con il principio di sostituzione (vedi) si può sostituire un qualsiasi circuito tra due morsetti C e D con un generatore che produce la stessa corrente o tensione che circola nei morsetti. Il difetto di questo principio è che bisogna conoscere per forza la corrente o la tensione effettiva che circola in quel punto del circuito. Avere queste informazioni risulta difficile nei circuiti complicati.
I teoremi di Thevenin e di Norton permettono invece trovare un circuito B equivalente a uno dato A partendo unicamente dalle caratteristiche di A, senza considerare tensioni, correnti e resistenze esterne a A, come invece si deve fare nel principio di sostituzione.

4) Legame tra i teoremi di Thevenin e di Norton

1) La resistenza equivalente dei circuiti di Thevenin e Norton è la stessa, perchè si calcola nello stesso modo. Vale cioè che:

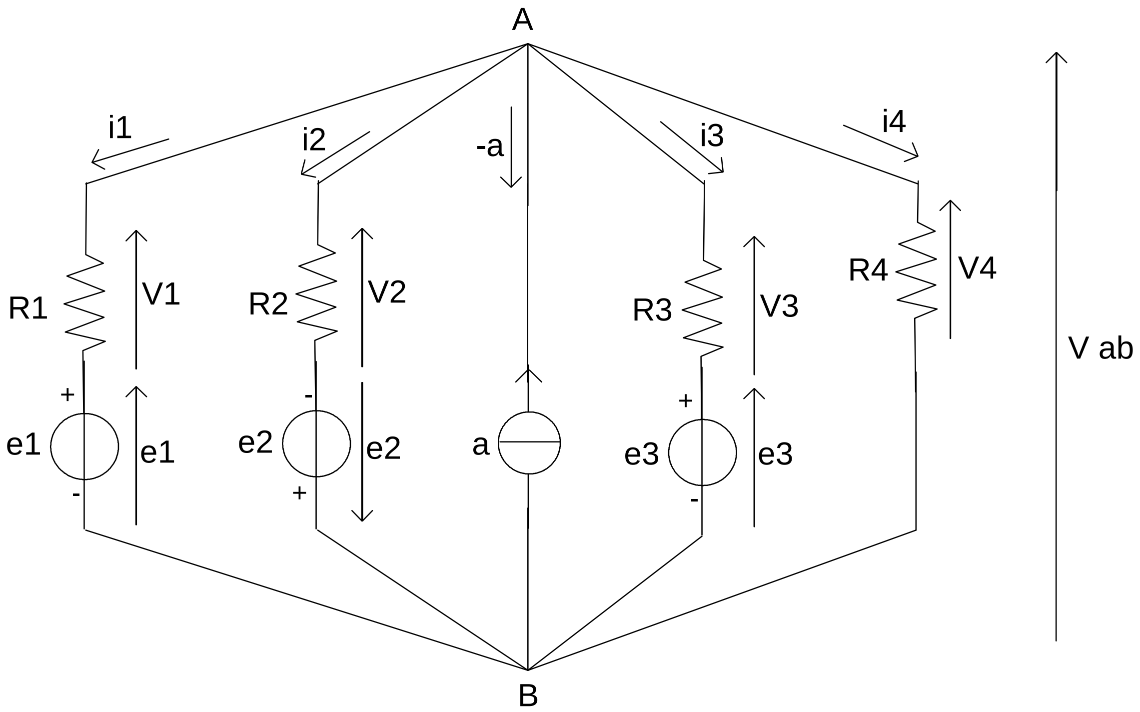
$$R_T = R_N$$

2) Per calcolare la tensione di Thevenin o la corrente di Norton dei generatori, si utilizza una legge molto simile ala legge di Ohm:

$$V_T = R_{eq} \cdot i_N$$

3) Teorema di Millman

E’ dato un circuito formato da vari *rami* in parallelo tra loro tra due capi A e B. Ciascun ramo può avere o meno generatori di corrente, di tensione e resistenze in serie.



1) Considero che:

$v_1 = R_1 \cdot i_1$
$v_2 = R_2 \cdot i_2$
$i_a = -a$ perchè diretta in verso opposto rispetto al verso della corrente scelto
$v_3 = R_3 \cdot i_3$
$v_4 = R_4 \cdot i_4$

2) Calcolo la tensione tra i capi A e B del circuito, scegliendo il verso indicato dalla figura per convenzione. Poichè tutti i rami sono in parallelo, la tensione tra A e B è uguale alla tensione ai capi di ogni ramo.

Ramo 1: $V_{ab} = V_1 + e_1 = R_1 \cdot i_1 + e_1$
Ramo 2: $V_{ab} = V_1 - e_1 = R_1 \cdot i_1 - e_1$ e_1 è negativa perchè il generatore è orientato in senso opposto al verso di V_{ab}.
Ramo a: Poichè si ha un generatore ideale di corrente, non si può dire nulla sulla tensione. Il generatore ideale di corrente genera un tensione pari a quella richiesta tra A e B.
Ramo 3: $V_{ab} = R_3 \cdot i_3$
Ramo 4: $V_{ab} = V_4 + e4 = R_4 \cdot i_4 + e_4$

3) Applico la KCL nel Nodo A, e ricavo le correnti richieste dalle precedenti formule:

$$i_1 + i_2 + i_a + i_3 + i_4 = 0$$

$$i_1 = \frac{V_{ab} - e_1}{R_1}$$
$$i_2 = \frac{V_{ab} + e_1}{R_1}$$
$$i_a = a$$
$$i_3 = \frac{V_{AB}}{R_3}$$
$$i_4 = \frac{V_{ab} - e_4}{R_4}$$

4) Svolgendo i passaggi, si ottiene che:

$$V_{AB} = \frac{\frac{e_1}{R_1} - \frac{e_3}{R_3} + \frac{e_4}{R_4} + a}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

Da cui si ricava il Teorema di Millmann:

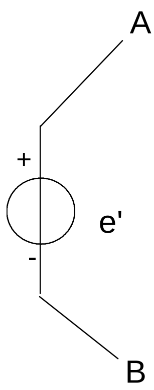
Definizione: dato il circuito in figura, vale che:

$$V_{AB} = \frac{\sum \pm \frac{e_k}{R_k} + \sum \pm a_k}{\sum G}$$

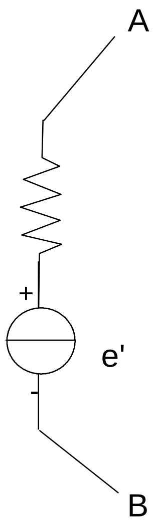
e_k= tensione generata dal generatore di tensione ideale
R_k= Resistenza in serie al generatore e_k
a_k= corrente generata dal generatore di corrente ideale
G= somma di tutte le conduttanze di tutte le resistenze del circuito, salvo.

NB: e_k e a_k vanno considerati positivi o negativi a secondo del loro orientamento.

Note



Nota 1



Nota 2

1) Se si aggiunge un ramo formato da un solo generatore di tensione, vale che $e(t) = V_{AB}$. Questo i può capire dimostrare in due modi:
- Fisicamente: poichè il generatore e' è direttamente collegato ai capi A e B, è evidente che la tensione da esso prodotta è uguale alla tensione tra in capi A e B.
- Matematicamente: si può immaginare che il generatore sia in serie a una resistenza nulla. In questo caso la formula del Teorema di Millman diventa un limite da risolvere che conferma la legge fisica.

2) Se si mette in serie a un generatore di corrente una resistenza, la resistenza non va considerata, in nessun caso: nè la numeratore, nè al denominatore. E' come se non ci fosse.