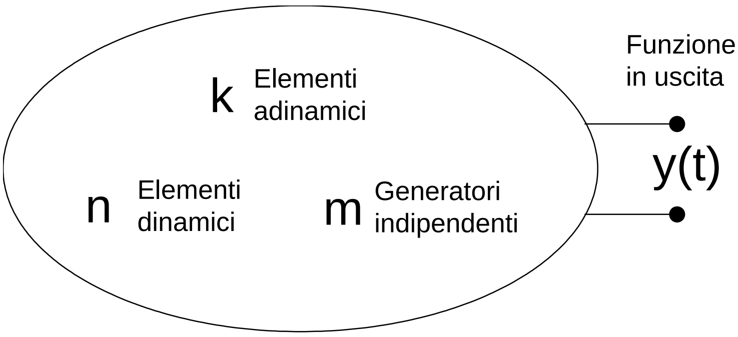
<u>Risposte e funzione di trasferimento dei circuiti</u>

Risposte del circuito

<u>Definizione</u>: la risposta di un circuito è una funzione matematica che esprime una grandezza di rete del circuito, tensione o corrente. E' determitata da vari fattori, come ad esempio le condizioni iniziali nelle quali si trovava il circuito, il segnale in ingresso al circuito, le caratteristiche stesse del circuito.

<u>Ipostesi</u>:
a) Proprietà: - Linearità
- Tempo invarianza
b) Numero di componenti: n: numero delgi elementi dinamici
m: numero dei generatori
k: numero degli elementi adinamici
c) x(t): generico segnale in entrata al circuito
d) y(t): generico segnale in uscita al circuito



Circuito lineare e tempo-invariante

<u>Dimostrazione:</u>
Al circuto si può applicare la trasformata di Laplace. I componenti del circuito si evolveranno in questo modo:

Dominio del tempo t	Dominio dell fraquenza s
n elementi dinamici	n resistenze simboliche + n generaotri idiendenti di condizioni iniziali
m generatori indipendenti	m generatori indipendneti trasformati
k elementi adinamici	k elementi adinamici trasformati

Il circuto ottenuto è adinamico, perchè tutti gli elementi dinamici si sono trasformati in resitenze simboliche e generatori indipendenti. Si può quindi applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. In particolare

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{n+m} A_i(s) \cdot B_i(s)$$

Dove: $A_i(s)$ = coefficiente del generatore B. A(s) è una funzione in s, ma va vista comunque come coefficiente. Nel dominio della frequenza, può succedere che coefficienti siano espressi come funzioni di s. Ciò invece non può avvenire nel dominio del tempo, perchè significherebbe avere le tempo-varianza.
$B_i(s)$ = Generico generatore indipendente del circuito trasformato
$Y(s)$ = grandezza di rete qualsiasi (tensione o corrente), considerata come segnale in uscita dal circuito che si vuole misurare.

In particolare, si può scomporre ulteriormente la sommatoria scritta, distinguendo tra generatori derivati da generatori indipendenti nel dominio del tempo (che chiameremo *generatori normali*), e generatori derivati dalle condizioni iniziali di condensatori e induttori:

$$\sum_{i=1}^{m} H_i(s) \cdot G_i(s) \ + \ \sum_{j=1}^{n} K_j(s) \cdot C_j(s)$$

Dove: $H_i(s)$ = Coefficiente del generatore *G* indipendente
$G_i(s)$ = generatore normale
$K_j(s)$ = Coefficiente del generatore C
$C_j(s)$ = Generatore delle condizioni iniziali di condensatore e induttore

Poniamo ora la seguente uguaglianza:

$$Y_F(s) = \sum_{i=1}^{m} H_i(s) \cdot G_i(s)$$
$$Y_L(s) = \sum_{j=1}^{n} K_j(s) \cdot C_j(s)$$

Si può quindi scrivere che il segnale di uscita ha la seguente forma:

$$Y(s) = Y_F(s) + Y_L(s)$$

Dal punto di vista fisico, i termini di questa espessione hanno un preciso significato:

$Y(s)$ = funzione che indica il segnale complessivo emesso dal circuito. E' detta *Risposta del circuito*

$Y_F(s)$ = per anlizzare questa componente è necessario annullare $Y_L(s)$ nel circuito, cioè annullare le condizioni iniziali del circuito. Ciò significa che $Y_F(s)$ rappresenta la parte di segnale dovuta esclusivamente ai segnali applicati in ingresso al circuito. E' definita *Risposta forzata.*

$Y_L(s)$ = questa componente è fomata dai generatori indipendenti causati dalle condizioni iniziali degli elementi dinamici. Rappresenta quindi la parte di segnale emesso dal circuito dovuta unicamente alle condizioni iniziali degli elementi dinamici che lo compongono. E detta *Risposta libera.*

La forma matematica delle risposte del circuito è una funzione razionale fratta del tipo:

$$Y(s) = \frac{\prod_{j=1}^{f} (s - z_j)}{\prod_{k=1}^{n} (s - p_k)}$$

Mentre l'antitrasformata della risposta è una somma di termini del tipo:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} A(t) \cdot e^{b \cdot t}$$

<u>Funzione di trasferimento</u>

<u>Definizione:</u> le funzioni di trasferimento sono i coefficienti dei generatori nell'applicazione della sovrapposizone degli effetti. Fisicamente, indica in che modo il circuito agisce sul segnale in ingresso.

Consideriamo le due precedenti sovrapposizoni degli effetti:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{n+m} A_i(s) \cdot B_i(s)$$
$$\sum_{i=1}^{m} H_i(s) \cdot G_i(s) \; + \; \sum_{j=1}^{n} K_j(s) \cdot C_j(s)$$

Allora si ha che:

$H_i(s)$ = Funzione di trasferimento del generatore G. Indica l'azione del circuito stesso sul segnale in ingresso

$K_j(s)$ = Funzione di trasferimento del generatore C. Indica l'effetto delle condizioni iniziali del circuito sul segnale in ingresso

$A_i(s)$ = Funzione di trasferimento del generatore B. Indica l'azione generale del circuito sul segnale in ingresso

<u>Caratteristiche</u>:

a) K(s) e H(s) sono funzioni razionali reali, e hanno la seguente forma:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad\qquad K(s) = \frac{N'(s)}{D'(s)}$$

b) Il grado di D(s) e D'(s) è al massimo n, cioè il numero di elementi dinamici del circuito.

c) I poli di D(s) e D'(s) sono gli stessi, se e solo se sono in forma canonica (vedi *Frequenze naturali*)

d) I poli di D(s) e D'(s) sono indipendeni dalle condizioni iniziali e dal segnale immesso nel circuito, dipendono solo dalla conformazione del circuito stesso.

e) I poli di D(s) e D'(s) sono detti *Frequenze naturali* del circuito

Risposta libera

<u>Ipotesi:</u> a) Si lavora nel dominio di Laplace della frequenza

b) Devono essere annullati tutti i generatori indipendenti derivati da generatori indipendenti nel dominio del tempo

c) Si considerano solo i generatori indipendenti delle condizioni iniziali

Caratteristiche:
a) La risposta libera è una funzione razionale reale con una forma generale del tipo:

$$Y_0 = \frac{N_0}{D_0}$$

a) Le frequenze naturali sono le stesse per la risposta libera e per le funzioni di trasferimento, se e solo se le funzione di trasferimento sono in forma canonica, cioè se:
   1) Sono state eseguite tutte le semplificazioni tra numeratore e denominatore
   2) Il coefficiente del termine con grado massimo del deniminatore è 1.

d) Le varie grandezze del circuto (ad esempio due tensioni presenti in due zone diverse del circuto) possono avere frequenze naturali diverse.

Frequenze naturali
Definizione: le frequenze naturali p sono i poli dei denominatori delle funzioni di trasferimento.
Caratteristiche:
a) Le frequenze naturali sono le stesse per ogni funzione di trasferimento, se e solo se le funzione di trasferimento sono in forma canonica, cioè se:
   1) Sono state eseguite tutte le semplificazioni tra numeratore e denominatore
   2) Il coefficiente del termine con grado massimo del deniminatore è 1.

b) Le frequenze naturali dipendono dal tipo e dalla posizione dei generatori indipendenti (sia di condizioni iniziali che normali), ma non dal valore delle condizioni iniziali o dalle funzioni impresse dei generatori normali.
c) Per calcolare le frequenze naturali, è possibile spegnere tutti i generatori del circuto, sia quelli derivati da conizioni iniziali, sia quelli normali. (Motivazione: vedi punto b)
d) Nei seguenti casi, aggiungere/rimuovere un elemento in serie/parallelo a altri non ha alcun effetto sulle frequenze naturali:

Componente da aggiungere/rimuovere	**Posizione del componente**	
Generatore di tensione	in serie a	elementi vari
Generatore di corrente	in parallelo a	elementi vari
elementi vari	parallelo a	generatore di tensione
elementi vari	in serie a	generatore di corrente

Nota Bene: la tabella va letta da sinistra a destra

e) Il numero delle frequenze naturali è dato da:

$$N_f = n_D - n_C - n_L$$

Dove: n_D = numero di elementi dinamici del circuito
n_C = numero di maglie cosrtituite da condensatori e eventuali generatori indipendenti di tensione
n_L = numero di linee chiuseche tagliano solo induttori e eventuali generatori di corrente

f)

Stabilità
Definizione: la stabilità di un circuito è il comportamento del circuito per tempi molto lunghi, tendenti a infinito. Si possono distinguere tre comportamenti:

Stati: a) Cirtuito stabile: per tempi molto lunghi, ogni grandezza di rete tende a estinguersi, cioè si avvicina allo zero
b) circuito al limite della stabilità: per tempi molto lunghi, alcune grandezze di rete continuano a oscillare intorno a un valore fisso, oppure si mantengono limitate al di sotto di un certo valore.
c) Circuito instabile: per tempi molto lunghi, alcune grandezze di rete diventano infinite, e ciò causa l'autodistruzione del circuito.

Dunque se il circuito è instabile in sè, qualche grandezza di rete tende a infinito. Perciò la risposta libera o la risposta forzata tendono a infinito. E' necessario dunque analizzare le risposte del circuito. Come detto in precedenza, l'antitrasformata della risposta libera è una somma di termini del tipo:

$$A(t) \cdot e^{b \cdot t}$$

Dove: A(t) = funzione qualsiasi, in genere trigonometrica o razionale
b = coefficiente dell'esponenziale, che, come dimostrato prima, corrisponde alla frequenza naturale e quindi anche al polo della risposta libera.

L'elemento dominante, che determina l'andamento della risposta libera risulta quindi essere l'esponenziale. E' necessario quindi analizzare l'esponenziale per conoscere la stabilità del circuito.

Il coefficiente b dell'esponenziale deriva dalla parte reale del polo, sia che il polo sia reale, sia che sia complesso. Infatti:

a) Se il polo è reale, si ha che:

$$L^{-1}\left[\frac{k}{s-p}\right]=k\cdot e^{p\cdot t}$$

b) Se il polo è complesso, si ha che:

$$L^{-1}\left[\frac{k}{s-p}\right]=2|k|\cdot e^{\mathrm{Re}(p)\cdot t}\cos(Im(p)\cdot t+\theta_k)$$

Analizzando l'esponenziale, si nota che:

a) Se b<0, si ha che:

$$\lim_{t\to\infty} A(t)\cdot e^{b\cdot t}=0$$

E quindi il circuito è stabile

b) Se b=0 e la molteplicità del polo è unica, si ha che:

$$\lim_{t\to\infty} A(t)\cdot e^{b\cdot t}=\lim_{t\to\infty} A(t) \quad \text{se} \quad b=0$$

Quindi il polo è costituito solo da valori complessi. Ciò significa che l'esponenziale vale $e^0=1$ e quindi è inifluente, mentre A(t) è una funzione trigonometrica ocillante. Il circuito è al limite della stabilità.

Per molteplicitàmaggiori di 1, bisona analizzare caso per caso l'antitrasformata.

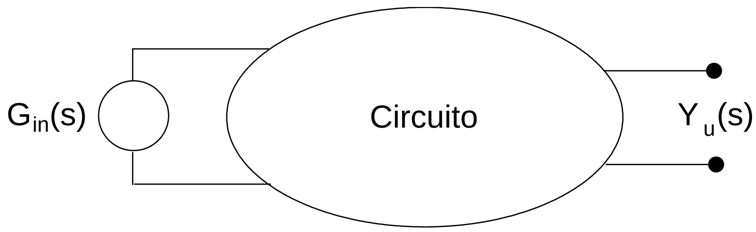
c) Se b>0, si ha che:

$$\lim_{t\to\infty} A(t)\cdot e^{b\cdot t}=\infty$$

E quindi il circuito è instabile

<u>Condizioni di stabilità:</u> Re(p)<0 ⇒ circuito stabile
Re(p)=0 e molteplicità=1 ⇒ circuito al limite di stabilità
Re(p)=0 e molteplicità>1 ⇒ Analizzare caso per caso
Re(p)>0 ⇒ Circuito instabile

Risposta forzata



Ipotesi: a) Si lavora nel dominio di Laplace della frequenza
b) Devono essere annullati tutti i generatori indipendenti derivati da condizioni iniziali di condenzatori e induttori
c) Si suppone che il circuito abbia un solo generatore, la cui grandezza di rete è assunta come segnale d'ingresso del circuito.

Poichè il circuito è resisitivo e lineare, con un solo generatore si ha che la risposta libera è data da:

$$Y_u(s)=H(s)\cdot G_{in}(s)$$

H(s) non dipnde dal segnale G_{in}, ma solo dalle caratteristiche del circuito. Risulta qundi che:

$$H(s)=\frac{Y_u(s)}{G_{in}(s)}$$

$$H(s)=\frac{L[Uscita]}{L[Ingresso]}$$

Caratteristiche

a) La risposta libera è una funzione razionale reale con una forma generale del tipo:

$$Y_0=\frac{N_F}{D_F}$$

b) Il denominatore della funzione di trasferimento H(s) è lo stesso della risposta libera. Ciò vale se e solo se sono già state fatte tutte le semplificazioni possibili tra numeratore e denominatore.