# Legame tra serie e trasformata di Fourier

Analisi armonica: metodo di analisi di un segnale. Il segnale viene scomposto in una sommatoria di infiniti segnali elementari (esponenziali complessi o seni/coseni), e vengono studiate tali componenti.

Armonica: ciascuno dei segnali elementari che, sommato agli altri, compone il segnale originale.

Metodi di scomposizione: - Serie di Fourier
- Trasformate di Fourier

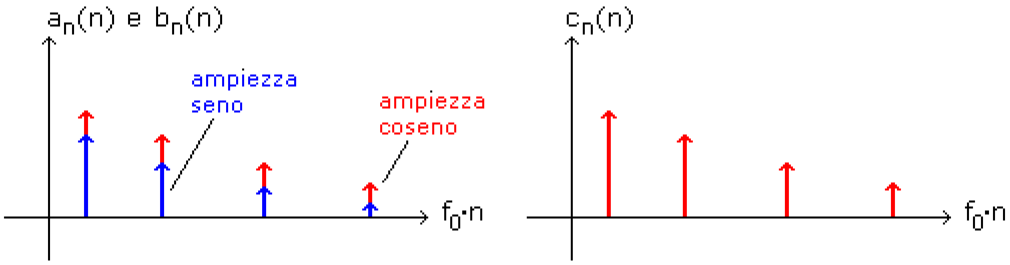
## Serie di Fourier

Principio: il segnale è scomposto in una somma discreta di armoniche, tutte sottomultiple di una armonica fondamentale, che ha frequenza pari a quella del segnale scomposto.

Segnali scomponibili: - Segnali a energia finita
- Segnali periodici

Segnali elementari: - Esponenziale complesso
- Funzioni trigonometriche seno e coseno

### Rappresentazione Grafica




Rappresentazione trigonometrica        Rappresentazione complessa

$f_o \rightarrow$ frequenza f(t) scomposto

La serie di Fourier, in entrambe le sue forme, può essere rappresentata come una serie di $\delta(n)$, ciascuna delle quali mostra frequenza e ampiezza di una armonica. Tale forma di rappresentazione, che risente della trasformata di Fourier, non è direttamente legata alla serie di Fourier, ma è pratica.

Ascissa: frequenza $f_0 \cdot n$ dell'armonica rappresentata. Deriva, tramite semplici passaggi, dalla pulsazione di sen/cos della serie di Fourier in forma trigonometrica. La costante $f_0$ rappresenta la frequenza della funzione periodica scomposta in serie.

Ordinata: ampiezza di una armonica, indicata dai coefficienti della serie di Fourier ($a_n$ / $b_n$ se in forma trigonometrica, $c_n$ per la forma complessa). Da notare che tali coefficienti sono in funzione di n.

Nota: - Le frequenze in cui sono centrate le $\delta$ nella forma complessa e nella forma trigonometrica sono le stesse.
- Nella forma trigonometrica esistono 2 ampiezze da rappresentare: quella del seno e quella del coseno. Perciò sono necessarie 2 serie di $\delta$. Per ogni n, le frequenze nella quale le due $\delta$ sono centrate coincidono (risulta evidente guardando l'espressione della serie di Fourier), mentre cambia l'ampiezza.

Forma complessa:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(n) \cdot e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \quad \text{con} \quad c_n(n) = \frac{1}{T}\int_{S}^{S} f(t) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

$S = \frac{T}{2}$

T = periodo della funzione

Note: - La sommatoria complessiva è funzione t (infatti rappresenta esattamente la funzione di partenza
- I coefficienti $c_n$ dipendono da n, indice della sommatoria

Forma trigonometrica:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(n)\cdot\cos\left(n\cdot\frac{2\pi}{T}t\right)+b_n(n)\cdot\text{sen}\left(n\cdot\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$a_0=\frac{1}{T}\cdot\int_S^S f(t)dt \qquad a_n(n)=\frac{1}{S}\cdot\int_S^S f(t)\cdot\cos(n\cdot\frac{2\pi}{T}t)dt \qquad b_n(n)=\frac{1}{S}\cdot\int_S^S f(t)\cdot\text{sen}(n\cdot\frac{2\pi}{T}t)dt$$

Rappresentazione di segnali periodici e a energia finita

Le formule indicate sono adatte a rappresentare sia segnali a energia finita che a energia infinita periodici. Come si vede dalla scrittura, all'aumentare di n le frequenze di seno e coseno diventano sottomultiple di quella di base. Perciò l'armonica con periodo più grande sarà quella con periodo uguale alla f(t) approssimanda. Dunque la Serie di Fourier per segnali a energia finita è la stessa che per segnali periodici. Bisogna solo far variare la variabile t della serie entro gli stessi estremi della funzione iniziale:

Segnali periodici$\rightarrow t\in(-\infty,+\infty)$

Segnali a energia finita, tra $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right] \rightarrow t\in\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$

## Trasformata di Fourier

Principio: il segnale è scomposto in una somma continua di armoniche. Le frequenze di tali armoniche sono tutti i possibili valori dell'asse reale.

Segnali scomponibili: - segnali a energia finita
- segnali periodici
- segnali casuali

Segnali elementari: - esponenziali complessi

Forma esponenziale:

$$F(f)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft}\cdot f(t)d(t) \qquad f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft}\cdot F(f)d(f)$$

Forma trigonometrica:

$$F(f)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\cos(2\pi f\cdot t)dt-j\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\text{sen}(2\pi f\cdot t)dt \qquad f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(f)\cos(2\pi f\cdot t)df+j\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(f)\cdot\text{sen}(2\pi f\cdot t)df$$

### Rappresentazione grafica

La trasformata di Fourier è una funzione a tutti gli effetti, il cui dominio comprende tutto $\mathbb{R}$. L'esistenza di frequenze negative, che può sembrare impossibile, sarà spiegato in seguito.

Asse ascisse: frequenza, positiva o negativa
Asse ordinate: ampiezza della componente esponenziale

### Frequenze negative

Le frequenze negative, che non esistono nella realtà, sono una conseguenza formale della definizione della trasformata di Fourier. Infatti essa scompone un segnale in una somma di esponenziali, cioè in una serie di contributi:

$$F(f)\cdot e^{-j\cdot 2\pi f\cdot t}\,df$$

Per ciascun valore di frequenza reale $f_0$ (dunque $f_0>0$), esistono due valori per la trasformata di Fourier: $+f_0$ e $-f_0$. Tuttavia, è possibile sommare i contributi relativi alla $f_0$ positiva e negativa, e ottenere le componenti sinusoidali del segnale, che utilizzano solo le frequenze positive esistenti nella realtà.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & +f_0 \arrow[r] & +F(+f_0)\cdot e^{-j\cdot 2\pi f_0\cdot t} \arrow[dr] & & \\
 & & f_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & F(f_0)\cdot[e^{+j\cdot 2\pi f_0\cdot t}+e^{-j\cdot 2\pi f_0\cdot t}+] \arrow[r] & F(f_0)\cdot 2j\,\mathrm{sen}(2\pi f_0\cdot t) \\
 & \text{Pari} \arrow[ur] & & -f_0 \arrow[r] & +F(+f_0)\cdot e^{+j\cdot 2\pi f_0\cdot t} \arrow[ur] & & \\
\text{F(f)} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & \\
 & \text{Dispari} \arrow[dr] & & +f_0 \arrow[r] & +F(+f_0)\cdot e^{-j\cdot 2\pi f_0\cdot t} \arrow[dr] & & \\
 & & f_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & F(f_0)\cdot[e^{+j\cdot 2\pi f_0\cdot t}-e^{-j\cdot 2\pi f_0\cdot t}] \arrow[r] & F(f_0)\cdot 2\cos(2\pi f_0\cdot t) \\
 & & & -f_0 \arrow[r] & -F(+f_0)\cdot e^{+j\cdot 2\pi f_0\cdot t} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Nota: il fattore 2 finale compare perchè vengono sommate parte negativa e positiva delle frequenze, e quindi si considerano solo le frequenze $f_0 > 0$.

**Legame tra la trasformata e la serie di Fourier**

La serie e la trasformata di Fourier hanno il medesimo obiettivo: scomporre un segnale in una somma di segnali elementari, detti armoniche. Tuttavia differiscono nel modo in cui scelgono le frequenze delle armoniche. La serie di Fourier usa frequenze con valori appartenenti ai numeri interi naturali, e tutti multipli di una frequenza fondamentale, mentre la trasformata di Fourier usa frequenze con valori appartenenti a tutto l'asse reale, sia positivo che negativo. Da queste considerazioni si individuano le differenze tra le due forme:

1) La variabile che indica la frequenza nella serie di Fourier è discreta, e multipla di una frequenza base, mentre nella trasformata di Fourier è continua su $\mathbb{R}$. Si può effettuare un cambio di variabile:

$$f_{trasformata} = n_{serie}\cdot f_0$$

2) La serie di Fourier fa uso di sommatorie, mentre la trasformata di Fourier di integrali (che è una sommatoria con contributi infinitesimi)

| | **Dominio frequenza** | **Dominio tempo** |
|---|---|---|
| **Serie di Fourier** | $c_n(n) = \frac{1}{T}\int_S^S f(t)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}dt$ | $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(n)\cdot e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$ |
| **Trasformata do Fourier** | $F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft}\cdot f(t)d(t)$ | $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)\cdot e^{j2\pi fx}\cdot d(f)$ |